

El arte de la conjetura de Jacobo Bernoulli ¿300 Años de pasado o futuro?

Víctor M. Pérez Abreu C.
Departamento de Probabilidad y Estadística
CIMAT-Guanajuato

XXVIII Foro Nacional de Estadística

26 de septiembre de 2013

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Soda!
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè scripta

DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.



BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
c1o lccc xlii.

Exhibición especial 2013 en Universidad de Basilea, Suiza



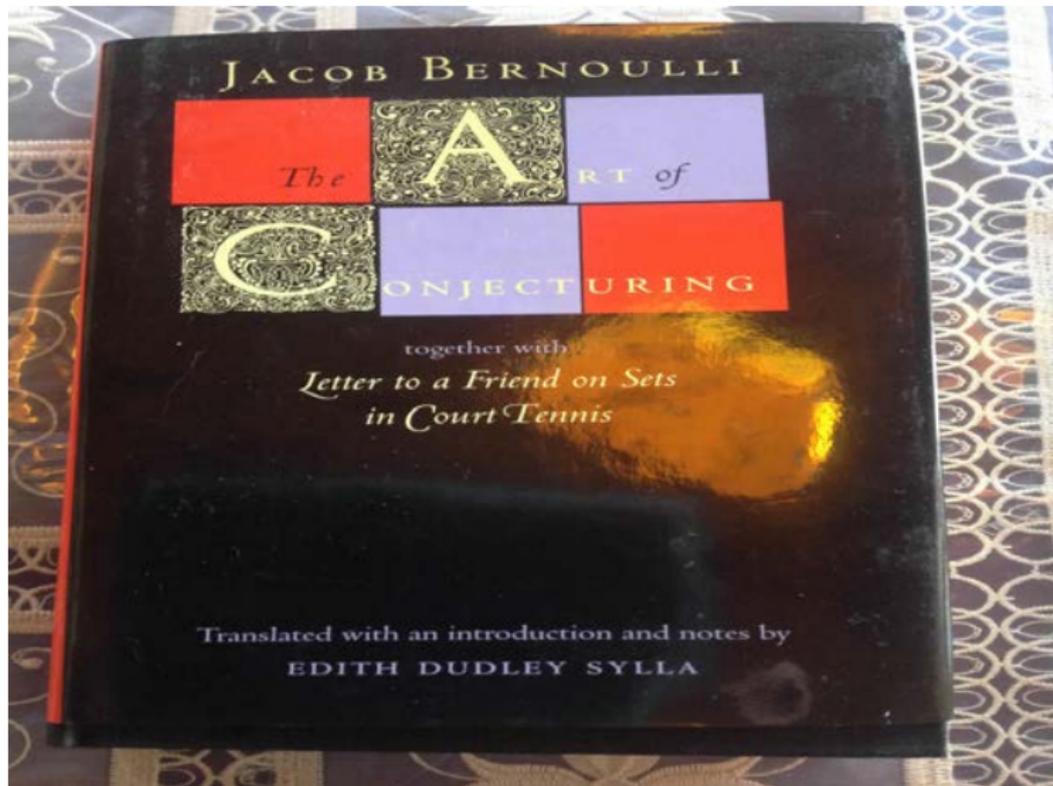
Jacobo Bernoulli (1654-1705)

Retrato pintado por su hermano Nicolas en 1687



Traducción "completa" al inglés en 2006

Por historiadora de la ciencia: Edith Dudley Sylla



El resultado de oro del Ars Conjectandi

Usando notación moderna: Implica la ley de grandes números

- En juegos de azar se conocen # casos posibles y # favorables.
- En procesos de la vida real el # casos posibles $(r + s)$ y # casos favorables r están ocultos.
- Repetición sucesiva de un experimento aleatorio en el cual se considera la ocurrencia (**fértil**) o no ocurrencia (**no fértil**) de un evento. Probabilidad de ocurrencia en cada repetición del experimento $p : r$ y s números naturales

$$p = r / (r + s).$$

- n # experimentos, S_n # éxitos, $\hat{p}_n = S_n / n$ **frecuencia relativa**.
- $\epsilon = 1 / (r + s)$.
- Resultado principal: Dado $c > 0$, se prescribe $N \geq 1$ tal que

$$P_r (|\hat{p}_N - p| \leq \epsilon) > c P_r (|\hat{p}_N - p| > \epsilon)$$

Visión y fracaso del resultado de oro

Conceptualización de cuantificación de incertidumbre y su medición, tamaño de muestra

- Dado $c > 0$, se prescribe $N \geq 1$ tal que

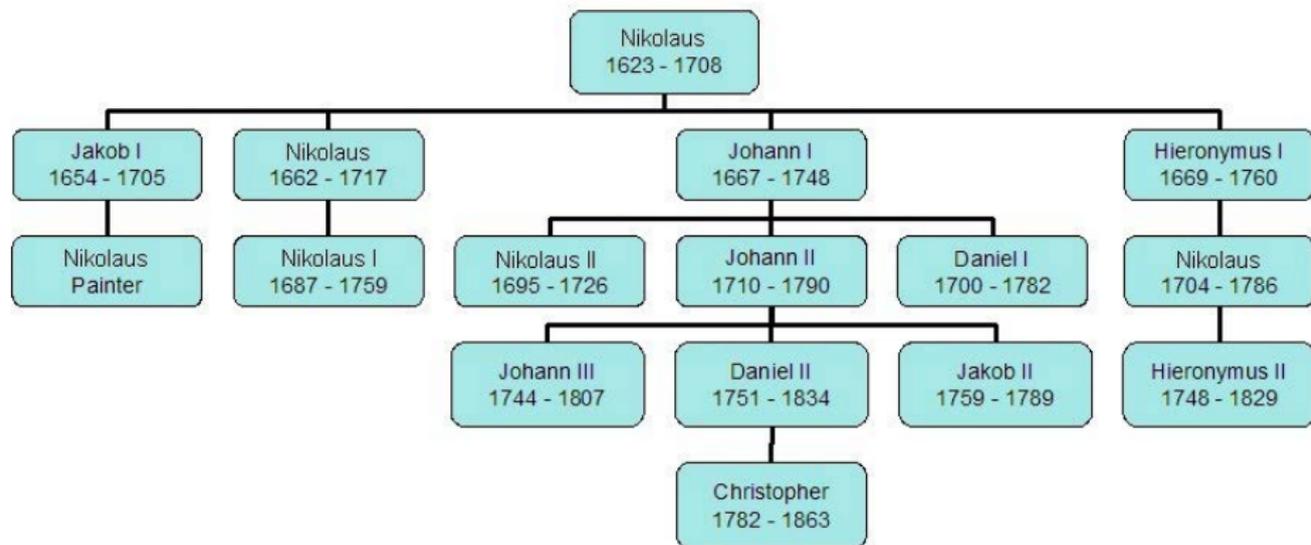
$$P_r \left(\left| \hat{p}_N - p \right| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c P_r \left(\left| \hat{p}_N - p \right| > \frac{1}{s+r} \right).$$

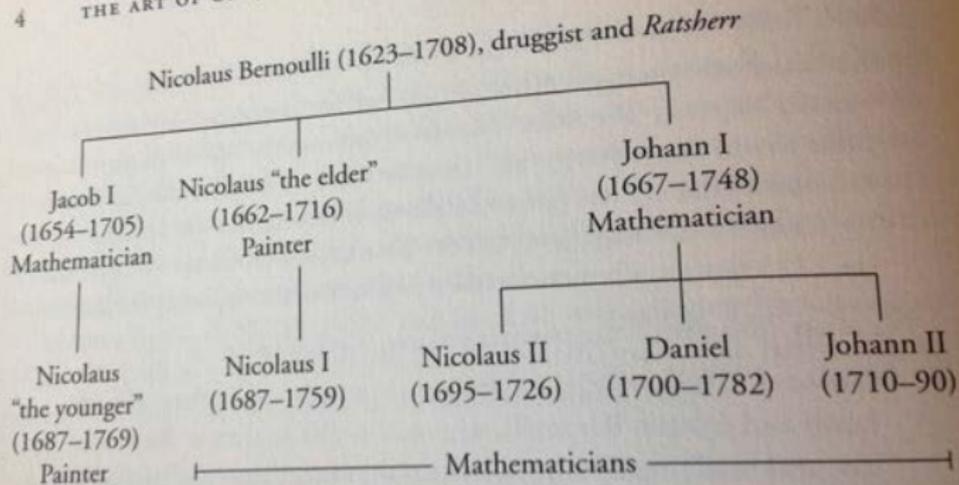
- $r = 30$, $s = 20$, $t = r + s = 50$
- cota superior $(r + 1)/t = 31/50$, cota inferior $(r - 1)/t = 29/50$
- $c = 1000$, $N = 25500$.
- Jacobo: "Si se tomaran $N = 25500$ experimentos sería 1000 veces más posible (verosímil) que la razón del número de observaciones fértiles estuviera en el **intervalo** $(29/50, 31/50)$ que fuera del intervalo."
- Continúa, "Si se tomara c como 10,000, se vería que sería más de diez mil veces más probable si hay 31,258 experimentos, y cien mil veces mas probable si hay 36,966 experimentos, y así sucesivamente hasta infinito, o, agregando de manera continua a los 25, 550 otros 5708 experimentos."

- I. Gestación, parto y llanto eterno del Ars Conjectandi.
- II. Por qué es obra fundamental.
- IV. Explicar "a la" Jacobo Bernoulli su resultado de oro.
- VI. El "fracaso" de Jacobo Bernoulli como estadístico.
- V. Jacobo Bernoulli el estadístico visionario.

- I. Contexto en que se escribe el libro.
- II. Hacia el Ars Conjectandi.
- III. Contenido y visión de la obra.
- IV. ¿Qué tenía en mente Jacobo Bernoulli?
- V. Estadística y Probabilidad en el libro.
- VI. Impacto.
- VII. Lecturas sugeridas.

I. Contexto: Familia Bernoulli (Basilea desde siglo XVII)





Although Johann II Bernoulli had sons Johann III (1744–1807) and Jacob II (1759–89), who are often counted among the Bernoulli mathematicians, we will not need to follow the Bernoulli family beyond the sons of Johann I.

A note on the spelling of Bernoulli.

- Guerras religiosas e intolerancia religiosa basada en dogmas.
- Origen de la física clásica, determinismo y pensamiento mecanicista
 - Galileo Galilei (1564-1642)
 - René Descartes (1596-1650)
 - Isaac Newton (1642-1727)
- Desarrollo del cálculo infinitesimal
 - Disputa entre Newton y Leibniz (1646-1716)
 - Contribuciones de Jacobo y Johann Bernoulli y relación con Leibniz
- Astronomía moderna
 - Johannes Hevelius (1608-1687): Observaciones de la luna y cometas
 - Christiaan Huygens (1629-1695): Anillo de Saturno
 - Giovanni Cassini (1625-1712): satélites de Saturno, distancia a marte.
 - John Flamsteed (1646-1719): eclipses solares en 1666 y 1668, observatorio de Greenwich.

- **Jacobo Bernoulli** estudió el **cometa Kirch** y publicó en 1681:
 - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
 - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.
 - Los cometas no son señales divinas de dios.
- Fideísmo
 - Piere Bayle (1647-1706): Sobre el cometa Kirch en 1682 (anónimo).
 - Blaise Pascal (1623-1662)
- Otros científicos de la época:
 - Robert Boyle (1627-1691): Un fundador de la química moderna
 - Robert Hooke (1635-1703): Gravitación, microscopía.
 - Johannes Hudde (1628-1704): abogado y matemático.
- **Inicios de la historia de la teoría matemática de la probabilidad**
 - 1660 (1552): El libro de juegos de Gerolano Cardano (1501-1576)
 - 1654: Cartas entre Blaise Pascal y Pierre Fermat (1601-1662).
 - 1657: Tratado sobre juegos de azar, Christiaan Huygens (1629-1695).

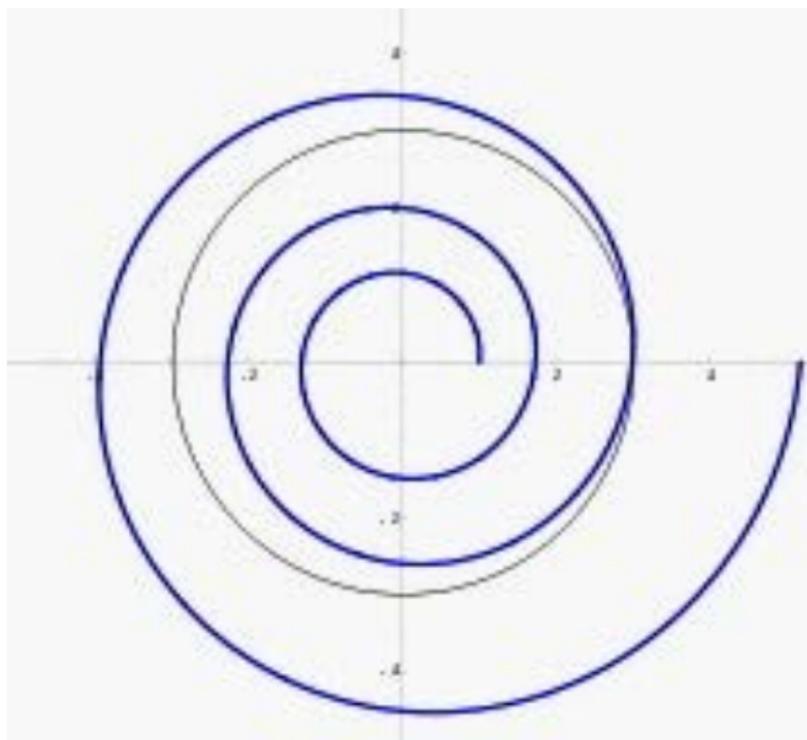
I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigorista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Trayectoria en la Universidad de Basilea, Suiza.
 - 1676: Se gradúa en filosofía y teología.
 - 1683: Enseña mecánica y física experimental.
 - 1687: Cátedra de profesor de matemáticas.
 - 1691: Protesta, es corrido y obligado a disculparse. Es reinstalado.
 - 1692: Decano (**Conferencia inaugural: *De arte combinatoria***)
 - 1700-1701: Rector
- Estudia matemáticas durante sus viajes después de graduarse:
 - 1676-1680: Suiza y Francia.
 - 1681-1683: Holanda e Inglaterra.
- Contribuciones en Matemáticas no en *El arte de la conjetura*
 - Cálculo infinitesimal, isoperimetría, cálculo de variaciones.
 - Geometría analítica, coordenadas polares.
 - Series infinitas, **espiral logarítmica**.

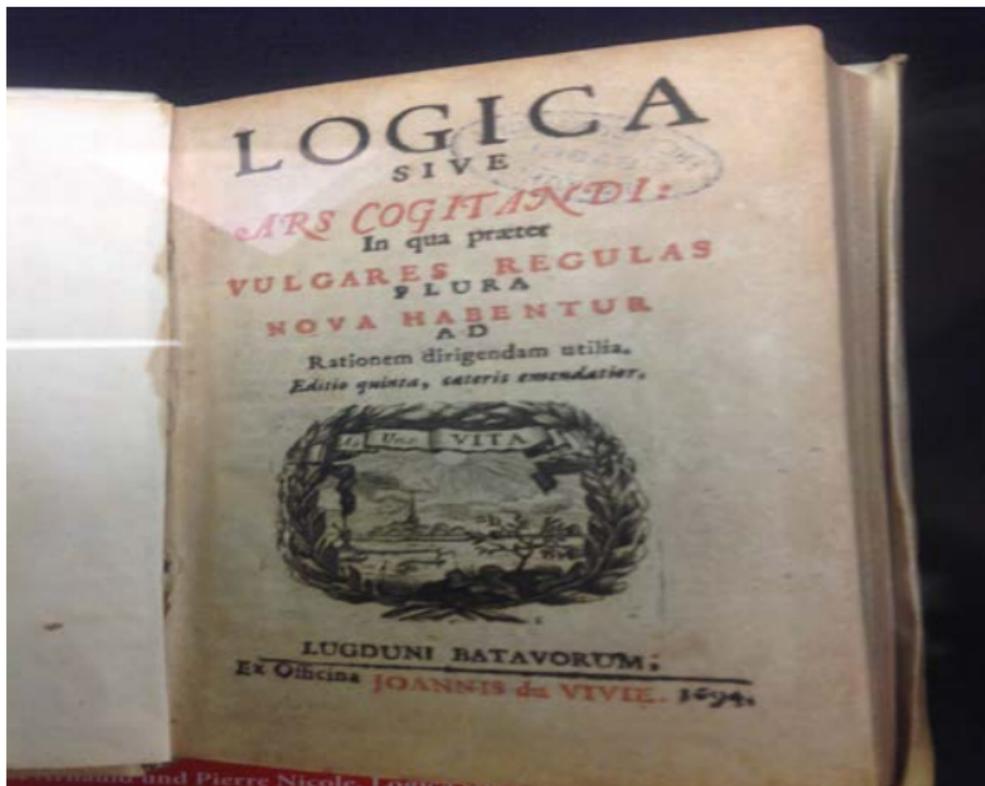
I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Espiral logarítmica



II. Gestación del Ars Conjectandi: Interés en incertidumbre

Decisiones bajo incertidumbre en analogía con juegos de azar (A. Arnauld y P. Nicole)



II. Gestación: Conocimiento del cuerpo humano

1686: Cartas a un amigo sobre juegos de tenis real

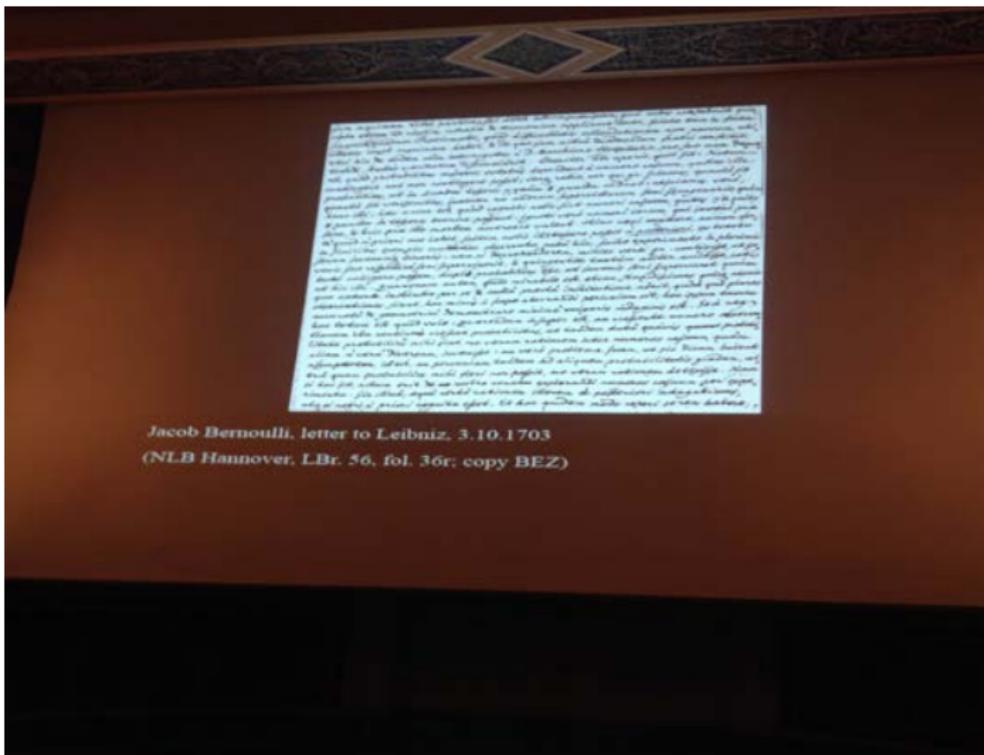


Tennis in Paris in 1632.

II. Gestación: Cartas entre Leibniz y Jacobo (1687-1705)

Modelos de urnas, simulación, criticismo, estimación, falta de aplicación convincente

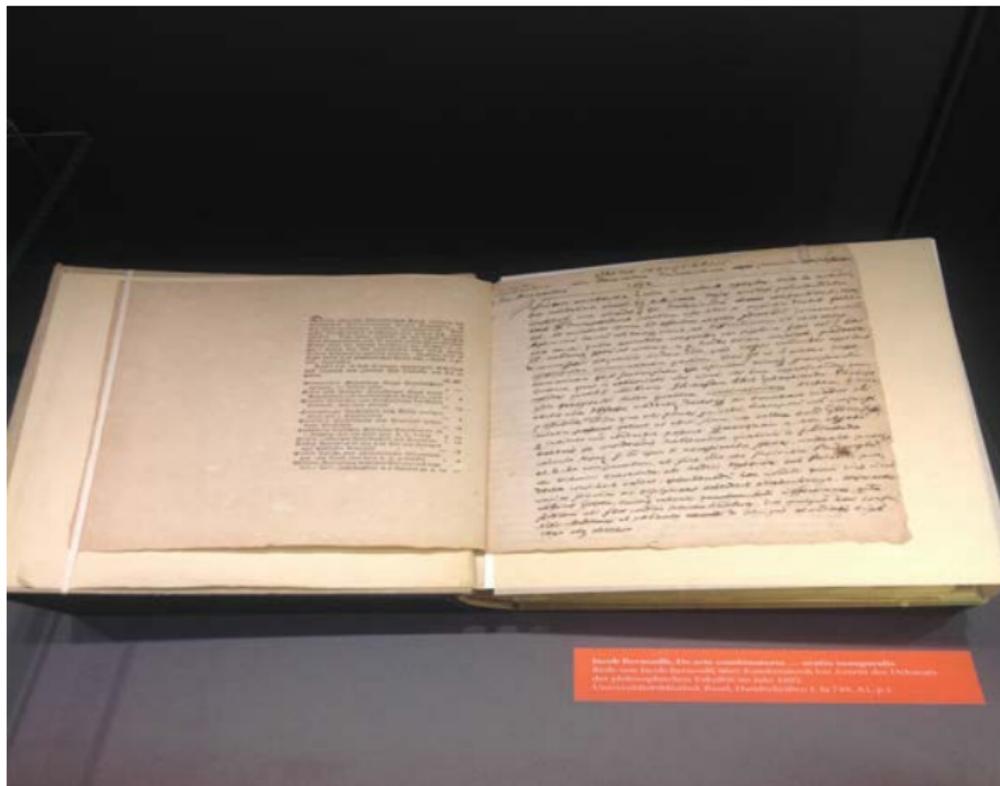
Nunca vio los datos de anualidades Johan de Witt (1625-1672)



Jacob Bernoulli, letter to Leibniz, 3.10.1703
(NLB Hannover, LBr. 56, fol. 36r; copy BEZ)

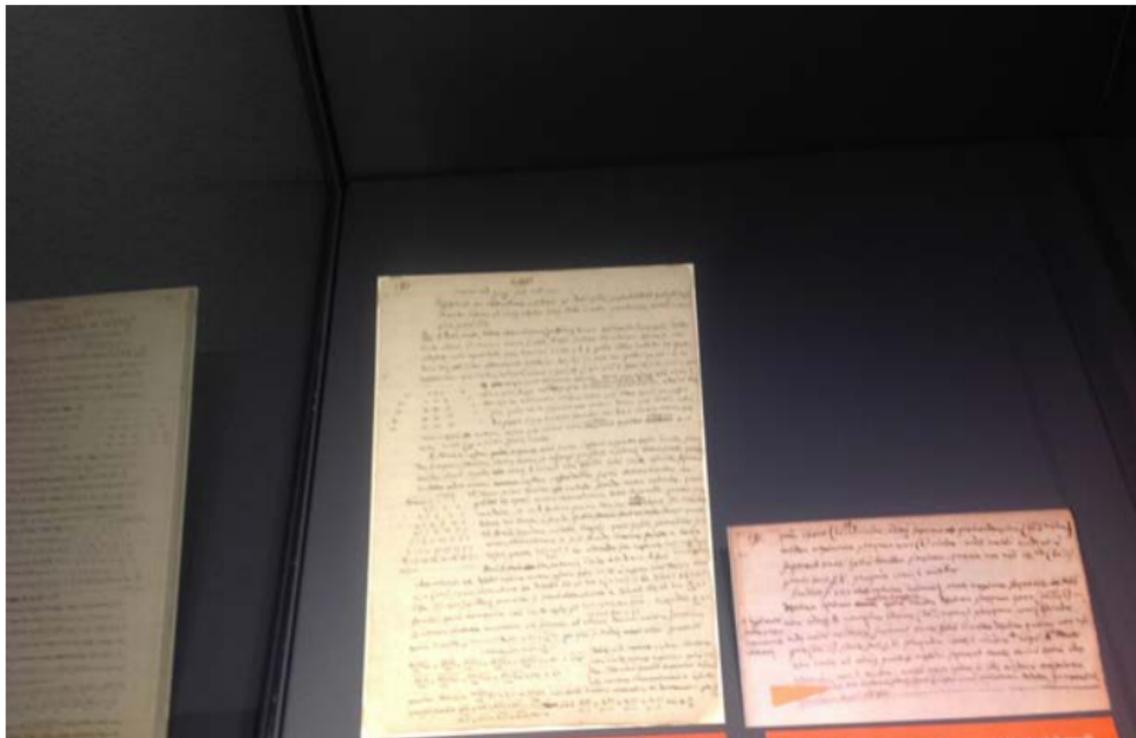
I. Gestación: Jacobo el Visionario

1692: Conferencia inaugural de decanato (sugerencias a médicos, políticos, militares).



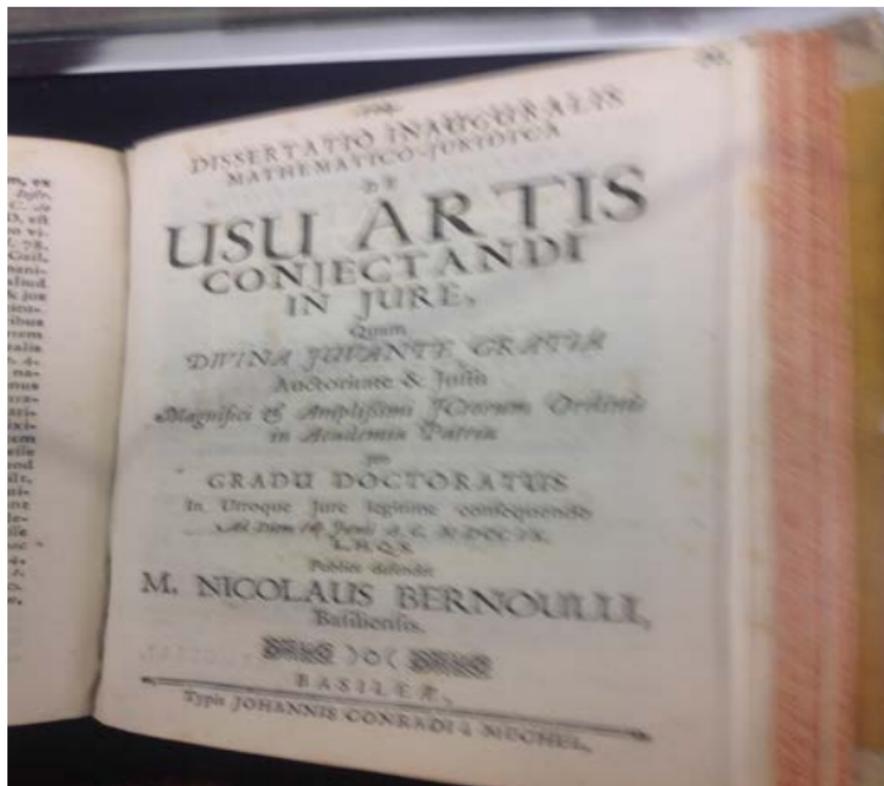
II. El parto: Diario (1677-1705) de Jacobo Bernoulli

Meditaciones, anotaciones, animaversiones teológicas y filosóficas: Matemáticas, narraciones de viajes, poemas, comuniones, prostitución, mujeres de Ginebra, resurrección, espiral logarítmica, problemas sanitarios de las ciudades



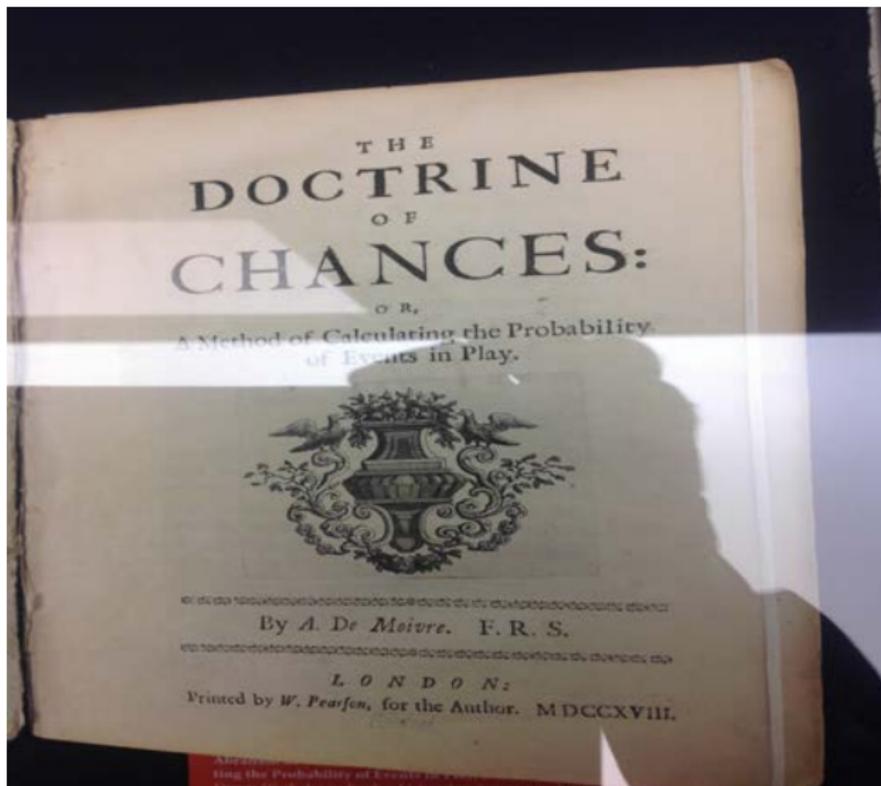
II. Parto: Trabajos pre 1713 "inspirados" en AC

1709: Di Use of Artis Conjectandi in Jure, Nicolas I Bernoulli



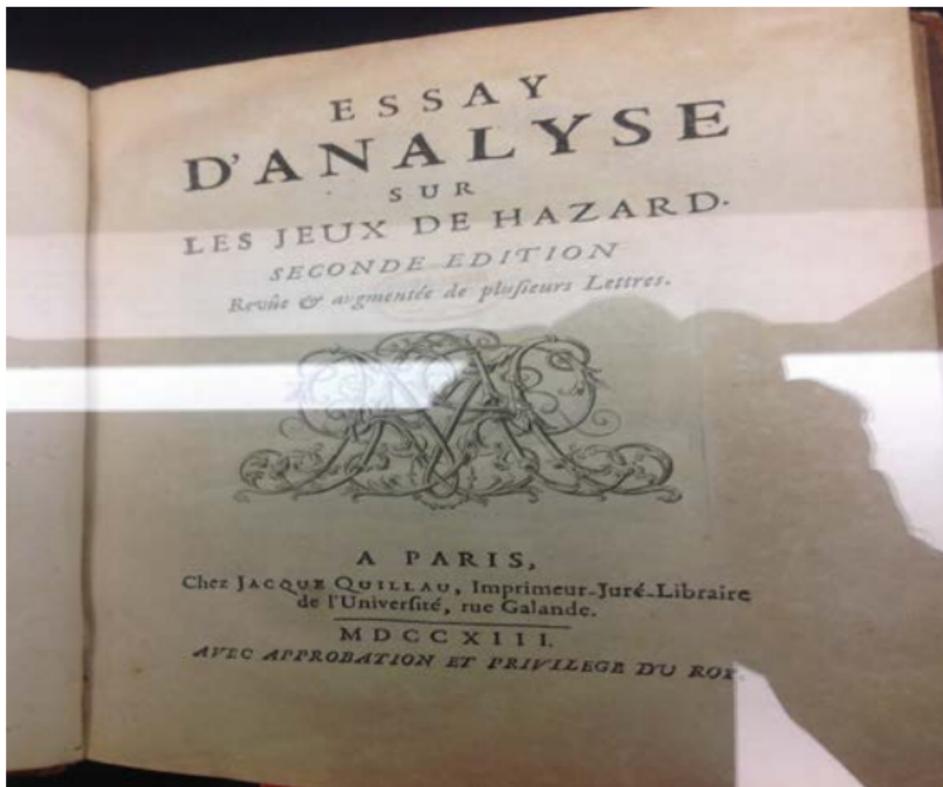
Parto: Trabajos pre 1713 "inspirados" en AC

1711: *La doctrina de las suertes*, Abraham de Moivre (1667-1754)



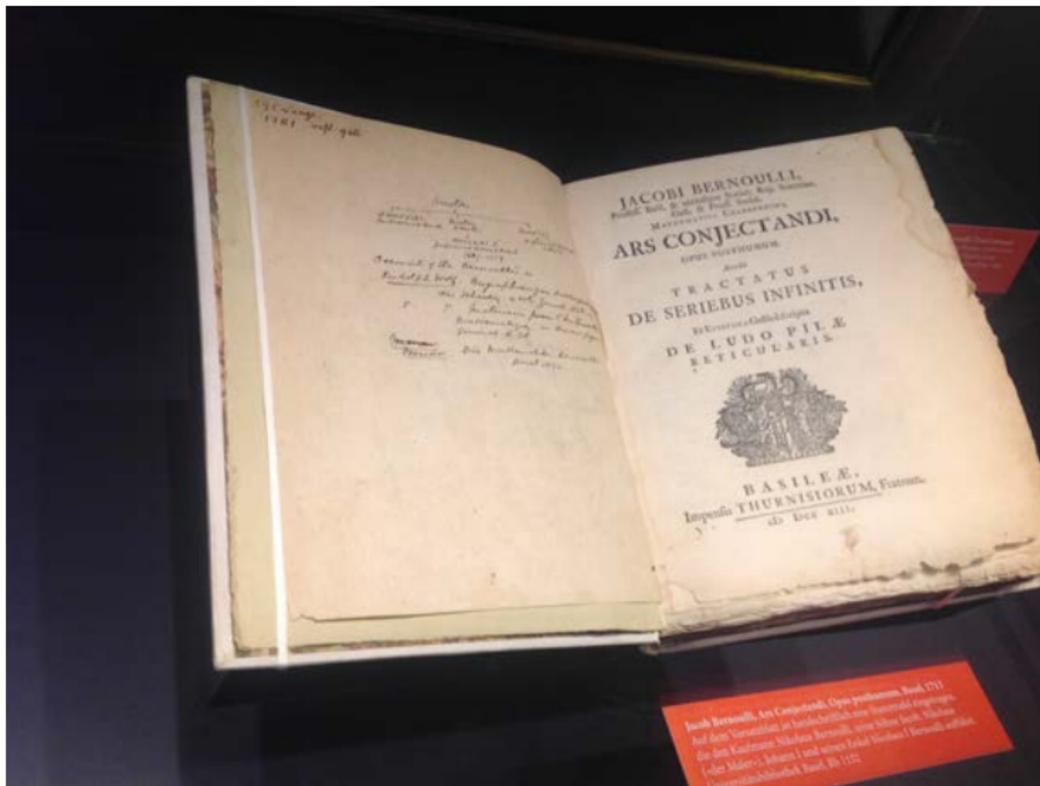
II. Parto: Trabajos pre 1713 "inspirados" en AC

1713: *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Pierre R. De Montmort



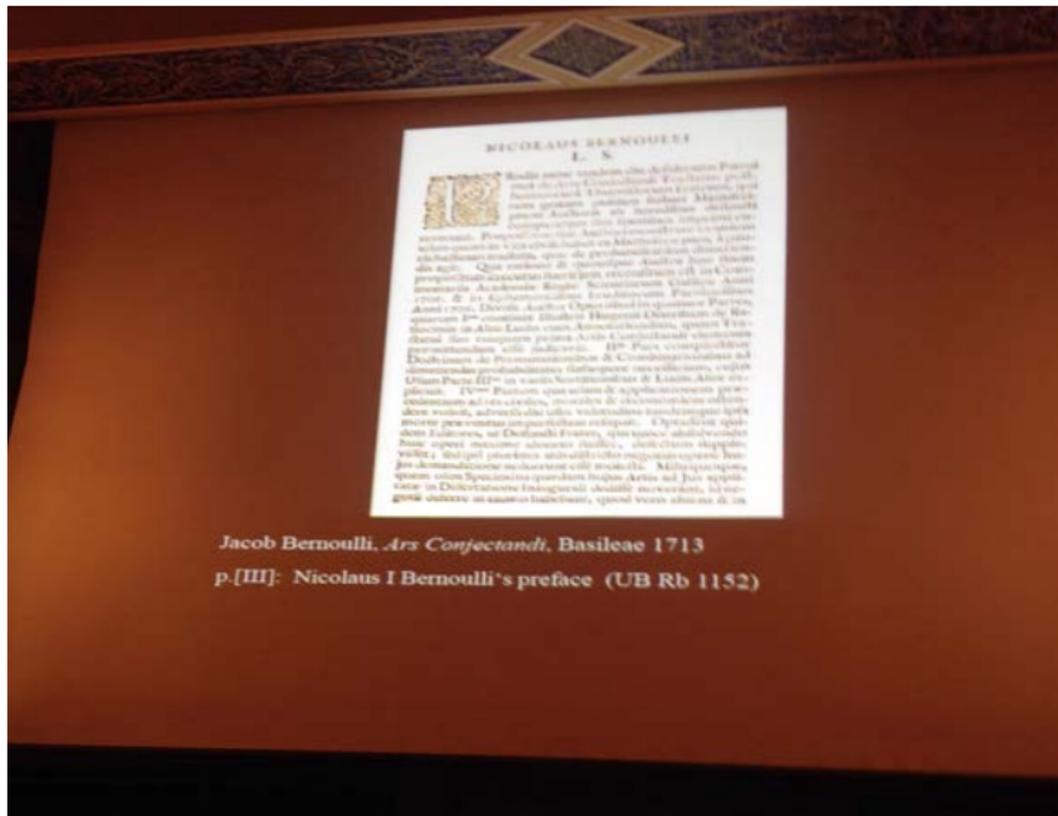
II. Parto: Publicación post mortem en 1713

Presión de Leibniz, dudas de la familia, Nicolas hijo lo lleva a la imprenta



II. Parto: Publicación post mortem en 1713

Prefacio escrito por su sobrino Nicolas I



Jacob Bernoulli, *Ars Conjectandi*, Basileae 1713

p.[III]: Nicolaus I Bernoulli's preface (UB Rb 1152)

III. Contenido de *Ars Conjectandi*

Cuatro partes, un apéndice y carta a un amigo

Parte I Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar.

- Estudio de 14 juegos de azar.
- Solución a cinco problemas nuevos de Huygens (ruina del jugador).
- Cálculo de valores esperados
- Distribución binomial.

Parte II Combinatoria

- Usa triángulo de Pascal
- Permutaciones y combinaciones
- Números de Bernoulli, sumas de potencias de enteros.

Parte III. 24 nuevos juegos de azar

Apéndice Series infinitas: Funciones theta

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^{n^2} \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} m^{n(n+3)/2}.$$

Carta a un amigo: Sobre juegos de tenis real.

III. Llanto eterno: Contenido Parte IV

Uso y aplicaciones de los resultados anteriores en asuntos civiles, morales y económicos

- Escribe Jacobo Bernoulli:
 - *Es bien conocido que la frecuencia relativa de un evento estará más cerca a la verdad si tenemos más observaciones (Cardano).*
 - *Este problema lo he pensado durante 20 años.*
 - *Su novedad y utilidad son tan importantes como su gran dificultad, excediendo la de las otras partes del trabajo.*
 - *Para mi este descubrimiento cuenta más que si hubiera encontrado la cuadratura del círculo; ya que si la encontrara sería de poca utilidad.*
- Contiene frases del tipo:
 - Predecir el futuro.
 - A pesar de que haya cosas ocultas.
- Establece nueve reglas de aplicación de *El arte de la conjetura*.

Llanto eterno: Comienzo de la Parte IV

THE ART OF CONJECTURING PART FOUR

Teaching

The Use and Application of the Preceding Doctrine in Civil, Moral, and Economic Matters

Chapter I. *Some preliminaries on the certainty, probability, necessity, and contingency of things*

The certainty of anything is considered either *objectively* and in itself or *subjectively* and in relation to us. Objectively, certainty means nothing else than the truth of the present or future existence of the thing. Subjectively, certainty is the measure of our knowledge concerning this truth.

In themselves and objectively, all things under the sun, which are, were, or will be, always have the highest certainty. This is evident concerning past and present things, since, by the very fact that they are or were, these things cannot not exist or not have existed. Nor should there be any doubt about future things, which in like manner, even if not by the necessity of some inevitable fate, [211] nevertheless by divine foreknowledge and predetermination, cannot not be in the future. Unless, indeed, whatever will be will occur with certainty, it is not apparent how the praise of the highest Creator's omniscience and omnipotence can prevail. Others may dispute how this certainty of future occurrences may coexist with the contingency and freedom of secondary causes; we do not wish to deal with matters extraneous to our goal.

Seen in relation to us, the certainty of things is not the same for all things, but varies in many ways, increasing and decreasing. Those things concerning the existence or future occurrence of which we can have no doubt—whether because of revelation, reason, sense, experience, $\alpha\upsilon\tau\omicron\upsilon\pi\tau\omicron\varsigma$ [autopsy, i.e., eyewitness], or other reasons—enjoy the highest, and absolute, certainty. All other things receive a less perfect measure of certainty in our minds, greater or less in proportion as there are more or fewer probabilities that persuade us that the thing is, will be, or was.

Probability, indeed, is degree of certainty, and differs from the latter as a part differs from the whole. Truly, if complete and absolute certainty, which we

IV. Variabilidad: mayor contribución conceptual de Jacobo

- Reducir la incertidumbre acerca del futuro es predecir el evento futuro.
- Dos problemas a resolver:
 - Cuantificar la incertidumbre acerca de un acontecimiento futuro.
 - Desarrollar un método para medir el valor de la incertidumbre.
- Problemas con alto grado de dificultad para el siglo XVII.
- Arte de la conjetura: Usar por analogía métodos de juegos de azar aplicados a la vida real, además de "el resultado mas difícil."
- La diferencia con juegos de azar es que no se conocen las condiciones, están sujetas a fuerzas ocultas.
- **Lo que no se conoce a priori, tiene que encontrarse a posteriori.**
- *La verdad no puede ser alcanzada, algunas cosas dependen de causas completamente desconocidas.*
- *No usar El arte de la conjetura en asuntos en los que la certeza completa se puede alcanzar (Axioma o Regla 1).*

IV. Qué pretendía Jacobo

Algunas definiciones en la Parte IV

- *Probabilidad es el grado de certidumbre y difiere de ésta como una parte difiere de total.*
- *La probabilidad de un evento futuro es el grado de certidumbre de su ocurrencia.*
- *Algo es más probable que otra cosa si tiene parte mayor de certeza.*
- *En lenguaje común algo es llamado probable si su probabilidad excede notablemente la mitad de la certeza.*
- *Lo que tiene $1/5$ de certeza es más probable que algo que tiene $1/10$, aunque ninguno es positivamente probable.*
- *Algo es posible si tiene una parte de certeza, aunque sea pequeña. Así, algo que tiene $1/20$ o $1/30$ de certeza es posible.*
- *Algo es **moralmente cierto** si su probabilidad es tan cercana a la certeza completa, que la diferencia no puede ser percibida.*
- *En contraste, algo es **moralmente imposible** si tiene solo como certeza la cantidad por la cual la certeza moral no alcanza la certeza total.*

IV. Regla o Axioma 9

Sorprendente

- *Ya que sin embargo, es rara vez posible obtener certeza completa en todo respecto, la necesidad y el uso ordenan que sólo lo que es moralmente cierto debe ser tomado como absoluta certeza.*
- **Sería útil, por lo tanto, que se definieran límites para la certeza moral los cuales debieran ser establecidos por un magistrado o autoridad.**
- *Por ejemplo, se debería determinar si 99/100 de certidumbre es suficiente o si se requiere 999/1000.*

IV. Explica qué es lo que tenía en mente

- *Para dar un ejemplo de lo que tengo en mente, supón que en una **urna** se tienen fichas, desconocidas a tí, 3000 de color blanco y 4000 de color negro, para investigar su número mediante experimentos, sacas una ficha sucesivamente (reemplazando....).....y observas cuántas veces salió una ficha blanca y cuántas una negra.*
- *La pregunta es si puedes hacer esto tantas veces que se vuelve diez, cien, mil, etc. veces más probable (o sea que al final se vuelve moralmente cierto) que el número de veces que obtuviste blanca o negra tendrían la misma razón de tres a dos que una razón diferente.*

Debe ser cuidadosamente observado que no queremos que la razón entre los números de casos que hemos observado se interpreten precisamente o como una indivisibilidad....

- *Más bien, la razón debe ser definida dentro de un rango, o sea contenida entre dos límites, los cuales pueden acortarse tanto como cualquiera quisiera.*

In the approximation, the numbers r , s , and t in the same ratio to each other, the more the larger the numbers r , s , and t in the same ratio to each other, the more the ratio $(r+1)/t$ and $(r-1)/t$ to the ratio r/t can be tightened. Therefore, if the ratio between the numbers of cases r/s , to be determined by experiments, is, say, a three-halves ratio, I do not use 3 and 2 for r and s , but rather 30 and 20, or 300 and 200, etc. It might be sufficient to set $r = 30$, $s = 20$, and $t = r + s = 50$, so that the bounds become $(r+1)/t = 31/50$, and $(r-1)/t = 29/50$. Moreover, let $c = 1000$. Then by the preceding in the Scholium, for the terms to

$$\text{the left: } m > \frac{\log [c(s-1)]}{\log (r+1) - \log r} = \frac{4.2787536}{142405} < 301$$

$$nt = mt + \frac{mst-s}{r+1} < 24,728$$

$$\text{the right: } m > \frac{\log [c \cdot (r-1)]}{\log (s+1) - \log s} = \frac{4.4623980}{211893} < 211$$

$$nt = mt + \frac{mrt-rt}{s+1} = 25,550.$$

Whence, by what has been demonstrated, it is inferred that if 25,550 experiments are taken, it will be more than 1000 times more likely [*verisimilius*] that the ratio of the number of fertile observations to the number of all the observations will fall between these bounds, 31/50 and 29/50, than outside them. On the same understanding, if c is set equal to 10,000 or 100,000, it may be seen that it will be more than ten thousand times more probable, if there are 31,258 experiments, and more than a hundred thousand times more probable, [239] if there are 36,966, and so forth to infinity, continually adding to the 25,550 another 5708 experiments. Whence at last this remarkable result is seen to follow, that if the observations of all events were continued for the whole of eternity (with the probability finally transformed into perfect certainty) then everything in the world would be observed to happen in fixed ratios and with a constant law of alternation. Thus in even the most accidental and fortuitous we would be bound to acknowledge a certain quasi-necessity and, so to speak, fatality. I do not know whether or not Plato already wished to assert this result in his dogma of the universal return of things to their former positions [*apocatastasis*], in which he predicted that after the unrolling of innumerable centuries everything would return to its original state.

IV. Llanto eterno: Aspectos filosóficos

- Dado $c > 0$, se prescribe $N \geq 1$ tal que

$$\mathbb{P}_N \left(|\hat{p}_N - p| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c \mathbb{P}_N \left(|\hat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r} \right).$$

- Jacobo... "*Se sigue de este resultado extraordinario que si se continuaran las observaciones de este experimento por toda la eternidad (con la probabilidad finalmente transformada en certidumbre perfecta), entonces todo en el mundo sería observar lo que ocurre en razones fijas y con una ley constante de alteración.*"
- Finaliza.... "*No se si Platón quería o no decir este resultado en su dogma.....todo regresa a su estado original.*"

IV. Llanto eterno: Objetivo de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de **toma de decisiones**.

IV. Llanto eterno: Objetivo de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de **toma de decisiones**.
- *Predecir algo es medir su probabilidad. La Ciencia de la Predicción o **Stochastics** se define por lo tanto como la ciencia de medir tan exacto como sea posible las probabilidades de eventos de tal forma que en nuestras **decisiones** siempre podemos elegir o seguir lo que parece mejor, más satisfactorio, más seguro o más considerado.*

IV. Llanto eterno: Objetivo de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de **toma de decisiones**.
- *Predecir algo es medir su probabilidad. La Ciencia de la Predicción o **Stochastics** se define por lo tanto como la ciencia de medir tan exacto como sea posible las probabilidades de eventos de tal forma que en nuestras **decisiones** siempre podemos elegir o seguir lo que parece mejor, más satisfactorio, más seguro o más considerado.*
- **En esto todo consiste la sabiduría de los filósofos y la prudencia del hombre de Estado.**

IV. Llanto eterno: Objetivo de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de **toma de decisiones**.
- *Predecir algo es medir su probabilidad. La Ciencia de la Predicción o **Stochastics** se define por lo tanto como la ciencia de medir tan exacto como sea posible las probabilidades de eventos de tal forma que en nuestras **decisiones** siempre podemos elegir o seguir lo que parece mejor, más satisfactorio, más seguro o más considerado.*
- **En esto todo consiste la sabiduría de los filósofos y la prudencia del hombre de Estado.**
- ¿Jacobo nunca formula ni pensó la ley de los grandes números?.

IV. Llanto eterno: Objetivo de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de **toma de decisiones**.
- *Predecir algo es medir su probabilidad. La Ciencia de la Predicción o **Stochastics** se define por lo tanto como la ciencia de medir tan exacto como sea posible las probabilidades de eventos de tal forma que en nuestras **decisiones** siempre podemos elegir o seguir lo que parece mejor, más satisfactorio, más seguro o más considerado.*
- **En esto todo consiste la sabiduría de los filósofos y la prudencia del hombre de Estado.**
- ¿Jacobo nunca formula ni pensó la ley de los grandes números?.
- No fue comprendido por sus contemporáneos. ¿Y nosotros?

IV. Llanto eterno: Objetivo de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de **toma de decisiones**.
- *Predecir algo es medir su probabilidad. La Ciencia de la Predicción o **Stochastics** se define por lo tanto como la ciencia de medir tan exacto como sea posible las probabilidades de eventos de tal forma que en nuestras **decisiones** siempre podemos elegir o seguir lo que parece mejor, más satisfactorio, más seguro o más considerado.*
- **En esto todo consiste la sabiduría de los filósofos y la prudencia del hombre de Estado.**
- ¿Jacobo nunca formula ni pensó la ley de los grandes números?.
- No fue comprendido por sus contemporáneos. ¿Y nosotros?
- ¡Un trabajo con limitaciones en cuanto a tamaño de muestra!

IV. Llanto eterno: Objetivo de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de **toma de decisiones**.
- *Predecir algo es medir su probabilidad. La Ciencia de la Predicción o **Stochastics** se define por lo tanto como la ciencia de medir tan exacto como sea posible las probabilidades de eventos de tal forma que en nuestras **decisiones** siempre podemos elegir o seguir lo que parece mejor, más satisfactorio, más seguro o más considerado.*
- **En esto todo consiste la sabiduría de los filósofos y la prudencia del hombre de Estado.**
- ¿Jacobo nunca formula ni pensó la ley de los grandes números?.
- No fue comprendido por sus contemporáneos. ¿Y nosotros?
- ¡Un trabajo con limitaciones en cuanto a tamaño de muestra!
- *Ars Conjectandi* es, a 300 años, **una obra fundamental en la teoría matemática de la probabilidad y la estadística, así como del pensamiento estadístico.**

IV. Llanto eterno: Probabilidad y Estadística en la obra

- Dado $c > 0$, se prescribe $N \geq 1$ tal que

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| \leq \epsilon) > c\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon).$$

- **Ley de los grandes números:** Dado $c > 0$, existe $N \geq 1$ y

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon) < \frac{1}{1+c}.$$

- **Probabilidad clásica:**

- \mathbb{P}_n , y p son racionales.
- Número de casos favorables entre número de casos posibles.

- **Estimación de probabilidades:**

- *Frecuencia relativa \hat{p}_n aproxima al verdadero valor p cuando **no es posible conocer todos los casos posibles.***

- **Convergencia en probabilidad:**

$$\mathbb{P}_n (|\hat{p}_n - p| > \epsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

- **Estimador consistente**

IV. Llanto eterno: Rigor y tamaño de muestra

- **Demostración:**

- Alto rigor: 5 lemas y "el límite"
- Definición de límite, John Wallis (1616-1703).
- 1821: Argumentos $\forall \epsilon > 0, \exists N > 1\dots$, Cauchy (1789-1857), Bolzano (1781-1848).

- **¿Qué tan grande debe ser el tamaño de muestra n ?:**

- Cota superior para la probabilidad es muy grande.
- $c = 1, \epsilon = 1/5000$ necesitan $n = 25550$.

- **Intuición y estudios empíricos** de Jacobo Bernoulli:

- *menos observaciones*

IV. Llanto eterno: Modelos de urnas, simulación, aplicación, riesgo.

- **Modelo de urnas**

- Con $r + s$ fichas

- $r = 3000, s = 2000$.
- Muestreo con reemplazo. Independencia.

- **Simulación**

- Para ilustrar el resultado.
- Estudios empíricos.
- Posibles aplicaciones.

IV. Llanto eterno: Aplicaciones visionarias sugeridas

Pensamiento estadístico

- Estimar probabilidades y estudiar variabilidad en problemas de seguros, leyes, epidemias, etc.
- No tuvo acceso a los datos de Johan de Witt.
- Introducción a la Parte II: Sin los métodos de Ars Conjectandi no puede continuar:
 - La cautela de los políticos (decisiones bajo incertidumbre).
 - Los diagnósticos médicos.
- Conferencia Inaugural como Decano:
 - Descifrar códigos.
 - Composición de medicamentos.
 - Consideración de probabilidad de intervalos es metrología avanzada para el Siglo XVII.

Epitafio de Jacobo Bernoulli

Mutante y permanente, vuelvo a resurgir siendo el mismo



Fig 7. Jacob Bernoulli's gravestone

Epitafio de Jacobo Bernoulli

Mutante y permanente, vuelvo a resurgir siendo el mismo



V. Impacto de Parte IV: Ley de grandes números

El comienzo de una historia de investigaciones bien conocida durante 300 años

- 1709, Nicolas I Bernoulli: aplicación en problemas reales.
- 1738, de Moivre (1667-1754): Teorema Central del Límite Local
- 1812, Laplace (1749-1827): Teorema Central del Límite Integral
- 1837, Poisson (1781-1840): Aproximación de Poisson
- 1853, Byenaymé (1796-1878), 1874 Chebyshev (1821-1894), 1884 Markov (1856-1922):

$$\mathbb{P}_n (|\hat{p}_n - p| > \epsilon) < \frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

- 1911, Bernstein (1880-1897): Demostración de Teorema de Weierstrass
- 1938, Cramer (1893-1985): Desviaciones grandes, $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}_n (|\hat{p}_n - p| > \epsilon) < 2 \exp(-2n\epsilon^2).$$

V. Impacto de Parte 4 de El arte de la conjetura

El comienzo de una historia de investigaciones bien conocida durante 300 años

Artículos especiales durante 2013 para celebrar 300 años de la Ley de los grandes números:

- **Manfred Denker** en el número de julio de 2013 del Bulletin of the American Mathematical Society:
 - Tercentennial Anniversary of Bernoulli's Law of Large Numbers.
- **Eugene Seneta** en el número especial de la Revista Bernoulli.
 - A Tricentenary history of the Law of Large Numbers

VII. Llanto eterno: Lecturas sugeridas

- 1 *The Art of Conjecturing*, Jacobo Bernoulli (1713). Traducción al inglés de Edith Dudley, 2006.
- 2 *Jacobo Bernoulli Deciphered*. Elart von Collani. Bernoulli News, Volume 13. No. 2, 2006.
- 3 *The Emergence of Mathematics/ Probability from the perspective of the Leibniz- Jacod Bernoulli Correspondence*. Edith Dudley. Perspectives on Science 6, 41-76, 1998.
- 4 *The Significance of Jacobo Bernoulli´s Ars Conjectandi for the Phylosophy of Probability Today*. Glenn Shafer.
- 5 *The History of Statistics. The Measurement of Uncertanty before 1900*. Stephen M. Stigler, 1986.
- 6 *Tercentennial Anniversary of Bernoulli's Law of Large Numbers*. Manfred Denker, Bulletin of the American Mathematical Society 50, 373-390, 2013.
- 7 *A Tricentenary history of the Law of Large Numbers* Eugene Seneta, Bernoulli 19, 1088-1121.

VII. Llanto eterno: Comentario de Csorgo en 2001:

Jacob's programme, or dream rather, was wholly impossible to accomplish in the eighteenth century. It is impossible today, and will remain so, in the sense that it was understood then.

FELIZ AÑO INTERNACIONAL DE LA ESTADÍSTICA

pabreu@cimat.mx

www.cimat.mx/~pabreu

www.estadistica2013ciamat.mx